

EULER-POLE

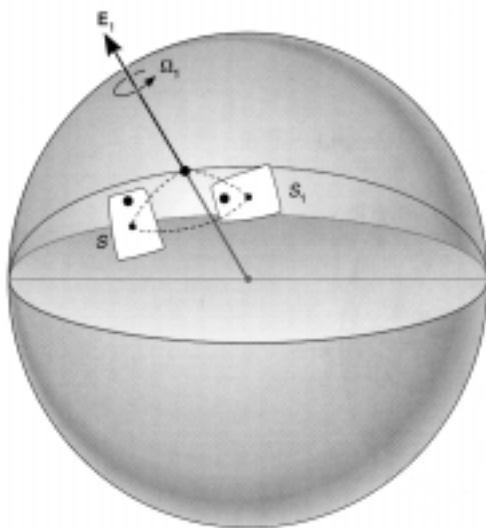
1. Relativbewegungen von zwei Platten auf einer Kugel

1.1. Beschreibung der Relativbewegung

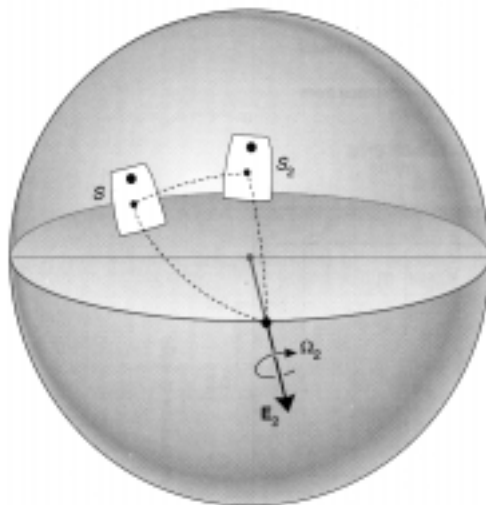
Jede Bewegung einer sphärischen Platte auf einer Kugel kann als eine Rotation dieser Platte um eine Achse E , die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und einen Winkel Ω aufgefaßt werden. Auch die Bewegungen der Platten auf der Erde lassen sich somit als Rotation um eine Achse und einen zugehörigen Winkel beschreiben. Diese Bewegung wird auch kurz $ROT[E, \Omega]$ genannt \Rightarrow Rotation um Achse E und Winkel Ω . Der Durchstoßpunkt dieser Achse an der Erdoberfläche wird als Euler-Pol bezeichnet. Man spricht deshalb auch von einer Rotation um einen Euler-Pol.

Der Euler-Pol ist durch Länge λ und Breite φ definiert. Somit wird die Rotation der Platte A beschrieben durch $ROT_A = (\varphi_A, \lambda_A, \Omega_A) \Rightarrow$ Rotation der Platte A um einen durch Länge und Breite definierten Euler-Pol und einen Rotationswinkel.

Nun kann die Relativbewegung einer Platte B bezüglich einer zweiten, festen Platte A beschrieben werden als: ${}^A ROT_B \Rightarrow$ Rotation der Platte B in Bezug auf die Platte A . Es kann sich hierbei beispielsweise um zwei Platten handeln, die an einem mittelozeanischen Rücken auseinanderdriften.



A.



B.

Figure 4.2 Motion of a small plate on a sphere. A. A plate moves from position and orientation S to position and orientation S_2 by a rotation of Ω_1 degrees about the Euler pole E_1 . The rotation path of any individual point is a small circle about the pole. B. The plate moves from the same position and orientation S to a position that is similar to that in (A) but a different orientation S_2 . The rotation is Ω_2 degrees about a different Euler pole E_2 . Any given point rotates along a small circle about E_2 .

Bild 1: Bewegung einer Platte auf einer Kugel

1.2. Relative Winkelgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine Platte A bezüglich einer Platte B bewegt, wird durch den Vektor der relativen Winkelgeschwindigkeit ω charakterisiert. Dieser Vektor gibt an, um welchen Winkel eine Platte in einer bestimmten Zeit rotiert wird (z.Bsp. 3 Grad pro 1 Mio Jahre o.ä.). Der Vektor der relativen Winkelgeschwindigkeit wird (wie alle Vektoren) durch seine Lage im Raum und seinen Betrag charakterisiert: Der Vektor geht durch den Erdmittelpunkt und durchstößt die Erdoberfläche am Eulerpol (\Rightarrow Lage in Raum). Die Länge des Vektors wird durch seinen Betrag bestimmt.

$${}^B\omega_A = ({}^B\varphi_A, {}^B\lambda_A, |{}^B\omega_A|)$$

mit:

${}^B\omega_A$ = Vektor der relativen Winkelgeschwindigkeit bzgl. der Rotation einer Platte A um eine

feste Platte B

${}_B\lambda_A$ und ${}_B\phi_A$ = Koordinaten des Durchstoßpunktes des Vektors an der Erdoberfläche, entspricht den Koordinaten des Euler-Poles

$|{}_B\omega_A|$ = Betrag des Vektors der relativen Winkelgeschwindigkeit

weiterhin gilt: $|{}_B\omega_A| = |{}_A\omega_B|$

1.3. Lineare Geschwindigkeit

Die relative Winkelgeschwindigkeit ist entlang der gesamten Plattengrenze konstant, d.h. die Öffnungsrate weist überall den gleichen Winkel pro Zeiteinheit auf.

Die lineare Geschwindigkeit zwischen zwei Platten wird im Gegensatz dazu in Abständen pro Zeiteinheit gemessen (also z.Bsp. 10cm pro Jahr o.ä.). Sie variiert entlang der Plattengrenze und gehorcht der Beziehung:

$${}_A V_B = R \times \sin\theta \times {}_A\omega_B$$

mit:

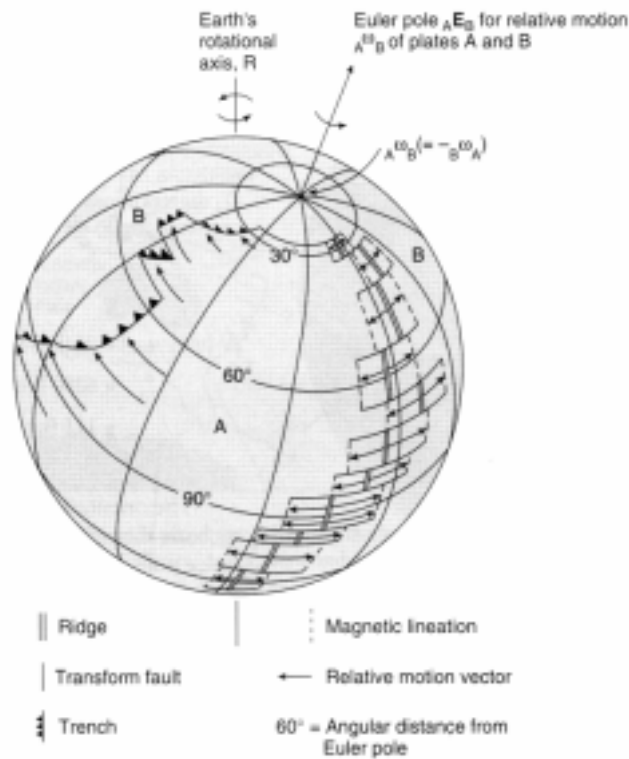
${}_A V_B$ = lineare Öffnungsgeschwindigkeit zwischen zwei Platten, gemessen in cm/a , m/Mioa ...

R = Radius der Kugel (in unserem Fall der Erdradius mit R = 6370 km)

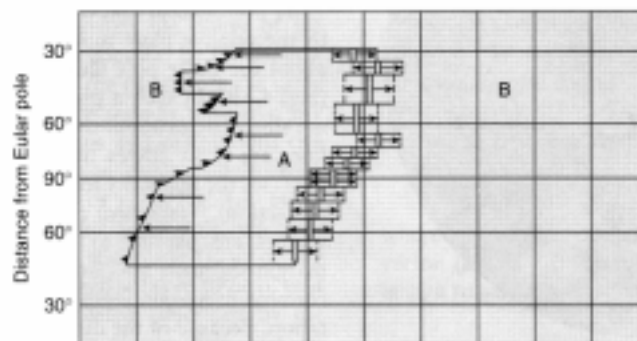
θ = Winkel zwischen dem Euler-Pol und dem Punkt an der Plattengrenze, für welchen die Öffnungsgeschwindigkeit bestimmt wurde

${}_A\omega_B$ = relative Winkelgeschwindigkeit zwischen den zwei Platten, in Radiant

Das bedeutet, daß beispielsweise die spreading-Rate an einem mittelozeanischen Rücken direkt am Euler-Pol Null ist ($\sin 0^\circ = 0$) und mit zunehmender Entfernung vom Euler-Pol größer wird. Ihren Maximalwert hat die Öffnungsgeschwindigkeit in einer Entfernung von 90° vom Euler-Pol (da $\sin 90^\circ = 1$).



A.



B.

Figure 4.3 The motion of two plates A and B with respect to each other on a sphere. A. The motion of plates on sphere is described by a relative rotation about an Euler pole. The boundary at right is a spreading ridge with transform faults. The boundary at left is a subduction zone with transform faults. Linear velocities along divergent and convergent boundaries vary as the sine of the angular distance from the Euler pole. Linear velocities at the divergent boundary are spreading velocities shown relative to the boundary. Linear velocities at the convergent boundary are of the downgoing plate relative to the overriding plate. Also shown is the pole of relative rotation ${}^A E_B$ between the two plates. Note that the pole of relative rotation of the plates does not correspond to the pole of rotation of the Earth. B. Mercator projection of the globe shown in (A). Projection is made on the pole ${}^A E_B$, so that transform faults and relative motion vectors are parallel to latitude lines, and ridges and magnetic lineations are parallel to longitude lines. Note that the Mercator projection distorts the dimensions so that the relative displacement arrows now are all the same length. (After Uyeda, 1978)

Bild 2: Bewegung von zwei Platten auf einer Kugel; dargestellt sind die geometrischen Beziehungen zwischen Euler-Pol, mittelozeanischem Rücken, Transformstörungen und Subduktionszonen.

1.4. Geometrische Beziehungen

Transformstörungen entlang eines mittelozeanischen Rückens sind subparallel zu konzentrisch um den Euler-Pol angeordneten Kleinkreisen und damit auch subparallel dem linearen Geschwindigkeitsvektor.

Mittelozeanische Rücken liegen subparallel zu den Großkreisen entlang des Euler-Pols und stehen damit senkrecht auf den Transformstörungen.

Subduktionszonen weisen keine festgelegte Richtung auf.

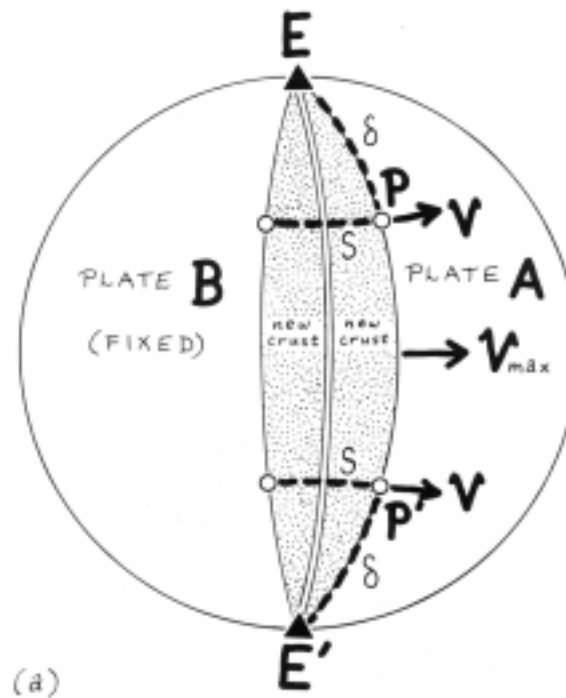


Figure 4-6.
E and E' are the Euler poles for the motion of plate A relative to plate B. (a): Stippled region is new crust added during time t , S is the distance between the isochrons that formed at time t , and $V = S/t$ is the velocity of plate A relative to plate B. (b) The velocity varies with distance δ from the point of observation P to the Euler pole E.

Bild 3: Rift zwischen zwei Platten A und B. Die relative lineare Geschwindigkeit hängt von der Entfernung zum Euler-Pol ab.

2. Konstruktion eines Euler-Pols

2.1. Konstruktion mittels Transformstörungen

Die Transformstörungen sind Kleinkreise um den Euler-Pol. Die Großkreise stehen senkrecht auf den Kleinkreisen und schneiden sich im Euler-Pol.

Sind nun die Transformstörungen entlang eines Ridges bekannt, so können die Großkreise senkrecht zu ihnen konstruiert werden. Der Schnittpunkt der Großkreise ergibt den Euler-Pol.

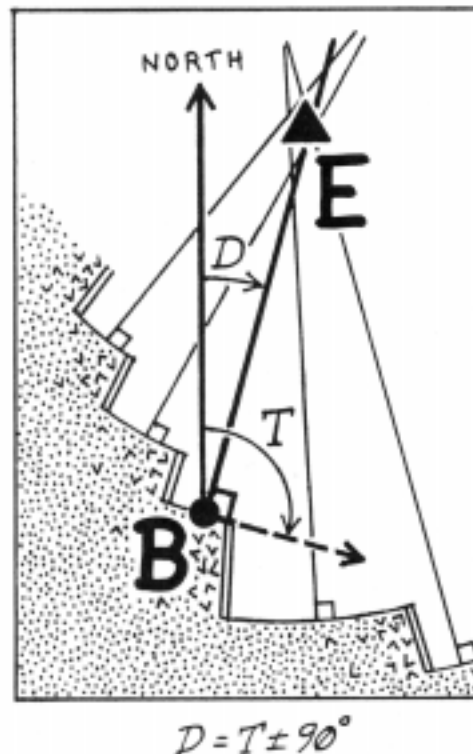


Figure 4-1.
Locating an Euler pole **E** from the trends T of transforms. Lines nearly intersecting at **E** are great circles perpendicular to the transforms.

Bild 4: Konstruktion eines Euler-Poles über Transformstörungen

2.2. Konstruktion mittels Geschwindigkeitsvektoren

Die relativen linearen Geschwindigkeiten entlang eines spreading ridges bewegen sich ebenfalls auf Kleinkreisen um den Euler-Pol. Kennt man nun verschiedene Geschwindigkeiten, kann der Euler-Pol wiederum aus senkrecht auf den Geschwindigkeitsvektoren errichteten Großkreisen konstruiert werden.

3. Absolute Plattenbewegungen

Bisher wurden nur relative Bewegungen und Geschwindigkeiten zwischen zwei Platten besprochen. Wenn man ermitteln möchte, wie weit sich eine Platte absolut auf der Erdkugel bewegt hat, braucht man zunächst ein auf der Erde festes Referenzsystem. Dieses liefern die Hot-Spots. Untersuchungen haben ergeben, daß etwa 90% aller Hot-Spots fest „verankerte“ Schloten im Erdmantel sind. Bewegt sich eine Platte über einen Hot-Spot, dann hinterläßt dieser eine „Spur“ von Vulkanen auf der Platte (z.Bsp. die Hawaii-Kette). Anhand dieses Hot-Spot-Referenzsystems können Richtung und Betrag absoluter Plattenbewegungen ermittelt werden.

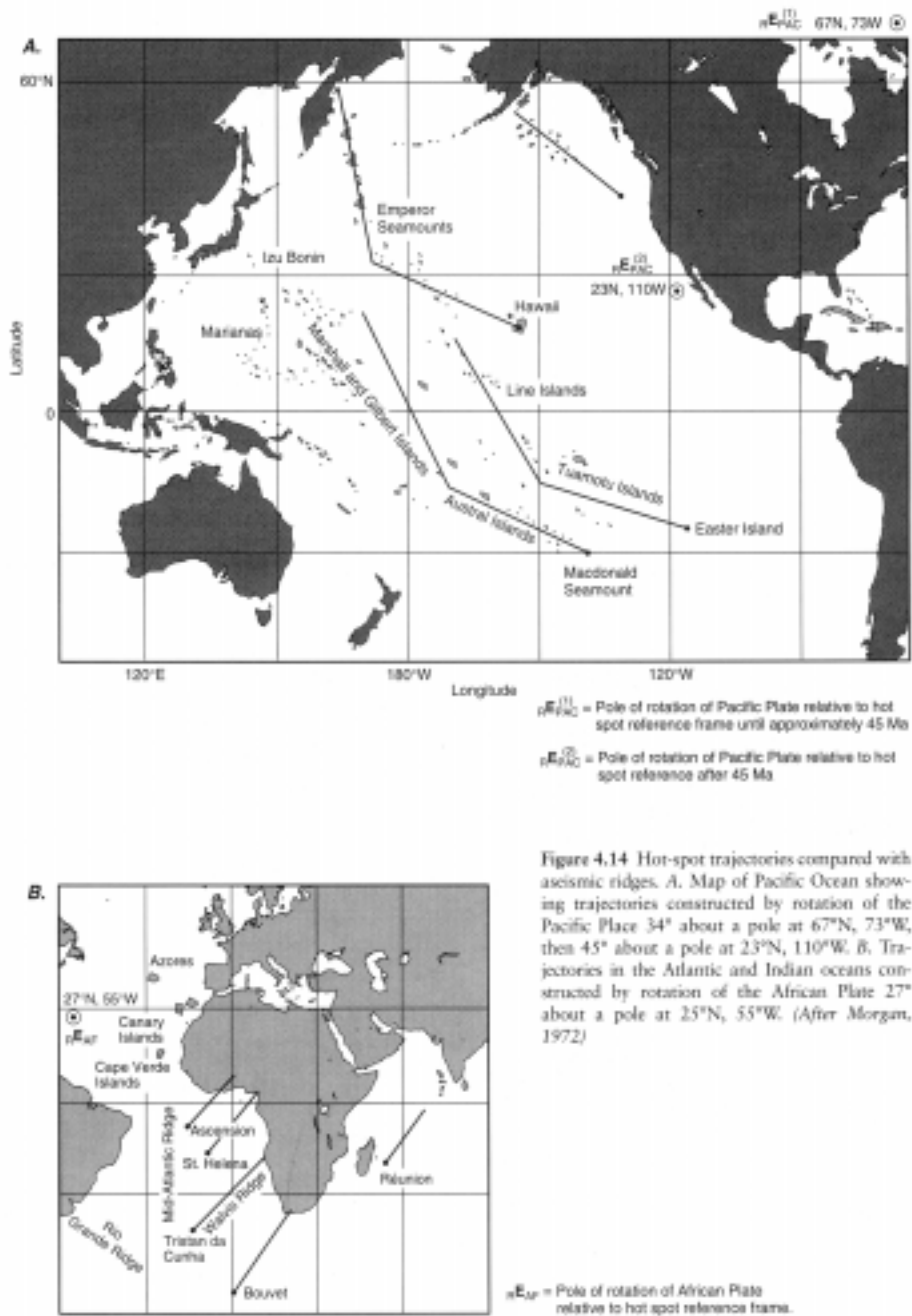


Figure 4.14 Hot-spot trajectories compared with aseismic ridges. A. Map of Pacific Ocean showing trajectories constructed by rotation of the Pacific Plate 34° about a pole at 67°N, 73°W, then 45° about a pole at 23°N, 110°W. B. Trajectories in the Atlantic and Indian oceans constructed by rotation of the African Plate 27° about a pole at 25°N, 55°W. (After Morgan, 1972)

Bild 5: Parallele Vulkanketten als Resultat der Bewegung der Platten über die feststehenden Hot-Spots

4. Aufgaben

4.1.

Die Erde dreht sich innerhalb von 24 h einmal um ihre eigene Achse, das heißt die Winkelgeschwindigkeit ist $360^\circ/24h$. Mit welcher linearen Geschwindigkeit bewegen sich

- a) Freiberg (51° n.B. / $13,5^\circ$ ö.L.)
- b) Der Kilimandjaro (3° s.B. / $37,5^\circ$ ö.L.)
- c) Süd-Georgien (54° s.B. / 36° w.L.)
- d) Irkutsk (52° n.B. / 105° ö.L.)
- e) Spitzbergen (79° n.B. / 15° ö.L.)

und welche Strecke wird dabei von den verschiedenen Orten pro Tag zurückgelegt? Erkläre die Ergebnisse! (Beachte, daß der Winkel der relativen Winkelgeschwindigkeit zunächst in Radiant umgerechnet werden muß.)

4.2.

Ermittle durch Konstruktion über Transformstörungen die Koordinaten des Vektors der relativen Winkelgeschwindigkeit zwischen

- a) der pazifischen und der antarktischen Platte
- b) der südamerikanischen und der afrikanischen Platte
- c) der nordamerikanischen und der eurasischen Platte

Vergleiche die Koordinaten mit den in Tabelle 1 angegebenen Werten! Worin liegen die Ursachen für die Abweichungen?

4.3.

Wie groß ist die relative Winkelgeschwindigkeit (in $^\circ/\text{Mio a}$) zwischen

- a) der pazifischen und der antarktischen Platte
- b) der südamerikanischen und der afrikanischen Platte
- c) der nordamerikanischen und der eurasischen Platte?

Gegeben sind dazu folgende lineare Öffnungsgeschwindigkeiten:

- 1. pazifische und antarktische Platte: $v = 7,097 \text{ cm/a}$ bei $52,5^\circ$ s.B. und 180° w.L.
- 2. südamerikanische und afrikanische Platte: $v = 3,719 \text{ cm/a}$ bei 0° n.B. und 0° w.L.
- 3. nordamerikanische und eurasische Platte: $v = 1,76 \text{ cm/a}$ bei 66° n.B. und 20° ö.L.

Vergleiche die Ergebnisse mit den in Tabelle 1 angegebenen Werten! Wodurch sind die Abweichungen zu erklären?

4.4.

Mit welcher relativen linearen Geschwindigkeit driften momentan

- a) Labrador (70° w.L. / 55° n.B.) und die britischen Inseln (0° w.L. / 50° n.B.)
- b) Kapstadt (19° ö.L. / 34° s.B.) und Buenos-Aires (58° ö.L. / 35° s.B.)
- c) Havanna (23° n.B. / $82,5^\circ$ w.L.) und Dakar (14° n.B. / 18° w.L.)
- d) Rio de Janeiro (45° w.L. / $23,5^\circ$ s.B.) und Windhoek ($22,5^\circ$ s.B. / 17° ö.L.)
- e) Cap Farewell (45° w.L. / 60° n.B.) und Kopenhagen (11° ö.L. / 55° n.B.)

auseinander?

Tabelle 1: Eulerpole und relative Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Platten der Erde

Platten	Längengrad des Euler-Pols	Breitengrad des Euler-Pols	Relative Winkelgeschwindigkeit [°/Ma]
Afrika/ Südamerika	-39,4	62,5	0,31
Nazca/ Südamerika	-94,0	56,0	0,72
Nazca/ Pazifik	90,1	55,6	1,36
Cocos/ Pazifik	-108,6	36,8	2,00
Pazifik/ Antarktis	96,0	-64,3	0,87
Eurasien/ Pazifik	-85,0	61,1	0,68
Nordamerika /Pazifik	-78,2	48,7	0,75
Eurasien/ Nordamerika	135,8	62,4	0,21
Australien/ Antarktis	38,2	13,2	0,65
Australien/ Pazifik	-178,3	-60,1	1,07
Indien/ Eurasien	17,7	24,4	0,51
Afrika/ Eurasien	-20,6	21,0	0,12
Afrika/ Antarktis	-39,2	5,6	0,13

Tabelle 2: Lage der Eulerpole bzgl. absoluter Plattenbewegungen

Platte	Längengrad	Breitengrad
Afrikanische Platte	3,6	-5,5
Antarktische Platte	65,9	-14,8
Arabische Platte	18,4	16,8
Australische Platte	41,8	9,6
Karibische Platte	-5,7	-62,4
Kokos-Platte	-115,9	18,4
Phillipinische Platte	-19,9	-49,4
Eurasische Platte	58,1	-44,8
Indische Platte	21,9	16,6
Juan de Fuca-Platte	60,0	-34,8
Nordamerikanische Platte	-11,1	-67,2
Nazca-Platte	-90,2	45,7
Pazifische Platte	90,0	-60,2
Südamerikanische Platte	74,7	-70,3

5. Grundlagen

5.1. Radiant

Die Messung eines Winkels erfolgt üblicherweise in Grad. Eine andere Methode ist das Bogenmaß (Radiant). Dieses kommt folgendermaßen zustande:

Der Umfang eines Kreises berechnet sich durch $u = 2 \times \pi \times r$.

Der Umfang eines Einheitskreises (Kreis mit Radius = 1) wäre dementsprechend $u = 2 \times \pi$.

Das heißt, daß 2π einem Winkel von 360° (Vollkreis) entsprechen, π entspricht einem Winkel von 180° , $\pi/2$ sind 90° usw.

Welcher Wert für das Bogenmaß welchem Winkel in Grad entspricht, kann über eine einfache Verhältnisgleichung leicht errechnet werden.

Zum Beispiel: Welchem Winkel in Grad entspricht ein Bogenmaß von $\pi/4$?

Lösung:

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi/4}{x}$$

und umgestellt:

$$x = \frac{\pi/4 \times 360^\circ}{2\pi}$$

$$x = 45^\circ$$

Bei vielen Berechnungen, unter anderem auch bei der Ermittlung der relativen linearen Geschwindigkeit, muß das Bogenmaß verwendet werden.

5.2. Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen. Jedem Vektor kann somit eine Richtung und ein Betrag zugeordnet werden.

Richtung: Festlegung durch ein Koordinatensystem

Betrag: Länge des Vektors

Im Falle des Vektors der relativen Winkelgeschwindigkeit, welcher seinen Ursprung im Erdmittelpunkt hat, dienen als Richtungsangabe die Koordinaten des Durchstoßpunktes des Vektors an der Erdoberfläche (Länge und Breite).

Die Rotationsbewegung eines Objektes wird durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben. Im Falle eines sich drehenden Rades ist der Rotationsvektor entlang der Achse gerichtet. Wenn man nun mit den Fingern der rechten Hand den Drehsinn des Rades beschreibt, ergibt sich die Richtung des Vektors durch den ausgestreckten Daumen (rechte-Hand-Regel).

Figure 4-16.

Fan on turntable. Angular rotation vector of fan blade is horizontal. Angular rotation of turntable is vertical.

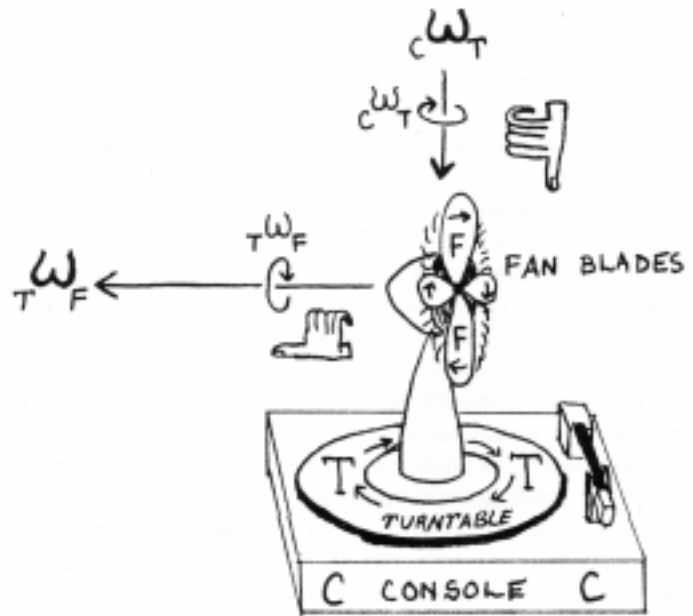


Bild 6: Ermittlung der Richtung von Rotationsvektoren durch die „rechte-Hand-Regel“

Beispiel:

Die Erde rotiert um ihre durch den Nord- und Südpol gehende Achse in Richtung Osten. Der zugehörige Rotationsvektor liegt deshalb in der Erdachse und hat die Koordinaten $(0, \pm 90^\circ)$, seine Richtung lässt sich durch die rechte-Hand-Regel bestimmen:

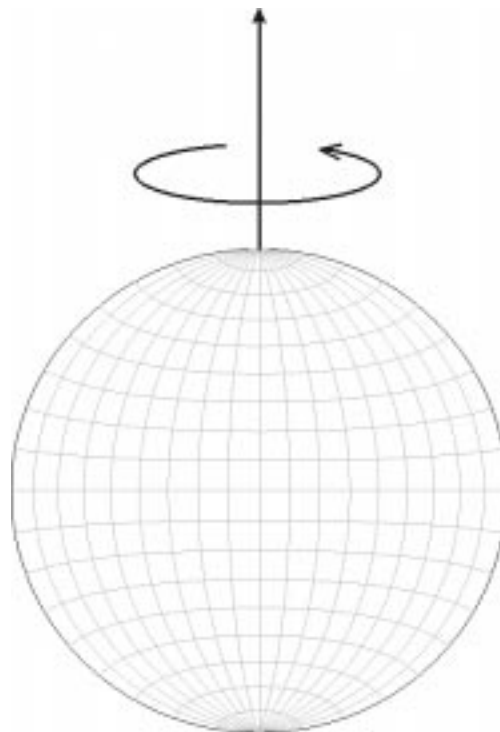


Bild 7: Richtung des Rotationsvektors der Erde

Der Betrag des Rotationsvektors der Erde ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Erde rotiert, also $360^\circ/24\text{h}$ bzw. $15^\circ/\text{h}$.

In Vektorschreibweise sieht der Rotationsvektor der Erde deshalb folgendermaßen aus:

$$\omega_{\text{Erde}} = (0^\circ, \pm 90^\circ, 15^\circ/\text{h})$$

5.3. Grundlagen der sphärischen Geometrie

5.3.1. Kleinkreise und Großkreise

Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis, der sphärischer Kreis genannt wird. Enthält die Schnittebene den Kugelmittelpunkt, heißt dieser Kreis Großkreis, sonst Kleinkreis.

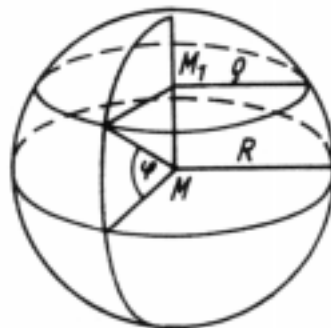


Bild 8: Kleinkreise und Großkreise auf einer Kugel

Wenn R der Radius der Kugel ist, dann ist die Länge des Radius ρ eines Kleinkreises (vgl. Bild)

$$\rho = R \times \cos \varphi$$

und der Umfang u eines Kleinkreises ist

$$u = 2\pi \times R \times \cos \varphi$$

Bezüglich der Erde sind alle Längengrade Großkreise, denn ihre zugehörige Schnittebene geht durch den Erdmittelpunkt. Die Breitengrade sind Kleinkreise, denn sie beinhalten den Erdmittelpunkt nicht. Eine Ausnahme bildet der Äquator, er ist der einzige Breitengrad, der ein Großkreis ist.

5.3.2. Berechnung des Winkels zwischen zwei durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten auf der Kugel

Die kürzeste Entfernung zwischen zwei Orten auf einer Kugeloberfläche ist der kleinere Bogen des Großkreises, der durch diese beiden Orte verläuft. Diese Distanz wird auch als Orthodrome bzw. orthodrome Entfernung bezeichnet. Man kann die Länge der Orthodrome sowohl als Entfernung (in Meter oder Kilometer o.ä.) als auch als Winkel zwischen den Punkten angeben.

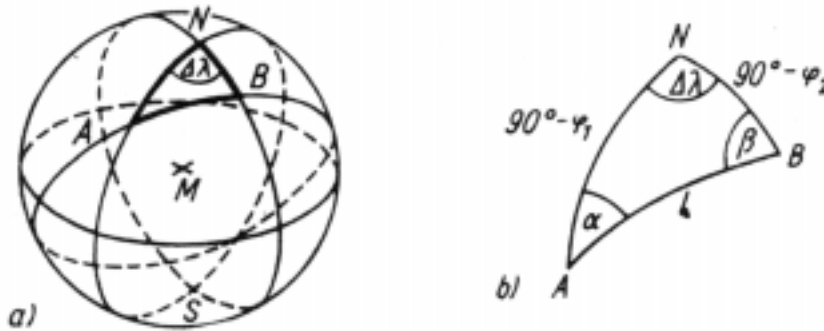


Bild 9: Winkelbeziehungen am sphärischen Dreieck zur Berechnung der orthodromen Entfernung

Sind nun zwei Orte durch ihre Koordinaten auf einer Kugel gegeben, so kann der Winkel zwischen ihnen natürlich konstruktiv im Schmidt'schen Netz ermittelt werden. Eine einfachere und schnellere Variante bietet jedoch die Berechnung des Winkels nach folgendem Muster:

Gesucht sind Länge und Winkel der Orthodrome l (d.h. die kürzeste Entfernung) zwischen Paris und Moskau.

Koordinaten (λ = Länge, φ = Breite):

Paris ($\lambda_1 = 2,3^\circ$ e.L.; $\varphi_1 = 48,8^\circ$ n.B.)

Moskau ($\lambda_2 = 37,6^\circ$ e.L.; $\varphi_2 = 55,8^\circ$ n.B.)

Es gilt der Seitenkosinussatz (dieser Satz beschreibt eine Geometriebeziehung am sphärischen Dreieck, die Herleitung kann in jedem Buch über räumliche Geometrie nachgelesen werden):

$$\cos l = \cos(90^\circ - \varphi_1) \times \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \times \sin(90^\circ - \varphi_2) \times \cos \Delta\lambda$$

Wegen der Komplementwinkelbeziehungen zwischen Sinus und Kosinus mit

$\cos \varphi = \sin(90^\circ - \varphi)$ und $\sin \varphi = \cos(90^\circ - \varphi)$ kann der Seitenkosinussatz auch geschrieben werden als:

$$\cos l = \sin \varphi_1 \times \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \times \cos \varphi_2 \times \cos \Delta\lambda$$

und die Werte des Beispiels eingesetzt:

$$\cos l = \sin(48,8^\circ) \times \sin(55,8^\circ) + \cos(48,8^\circ) \times \cos(55,8^\circ) \times \cos(35,3^\circ)$$

$$l = 22,4^\circ$$

$$l = 22,4 \times 111,1 \text{ km} = 2488 \text{ km}$$

Die kürzeste Entfernung (Luftlinie) zwischen Paris und Moskau ist demnach 2488 km.