Wunderbare Quaternionen: Geometrie von Rotationen

Helmut Schaeben
Mathematische Geologie und Geoinformatik, TU Freiberg

Freiberg, 5. Jun. 2007

Quaternionen wurden von Hamilton 1843 als ein Ergebnis seiner Suche nach einer höherdimensionalen Verallgemeinerung der komplexen Zahlen in die Mathematik eingeführt. Quaternionen können zur Darstellung von Rotationen benutzt werden und liefern dann z.B. eine elegante Lösung des folgenden Problems: Gegeben seien zwei Rotationen $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}(\omega_i, \mathbf{n}_i) \in \mathrm{SO}(3), i = 1, 2$, durch ihren jeweiligen Rotationswinkel $\omega_i \in [0, \pi]$ und ihre jeweilige Rotationsachse $\mathbf{n}_i \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Gesucht sind Rotationswinkel ω und Rotationsachse $\mathbf{n}$ der durch nacheinander Ausführen zusammengesetzten Rotation $\boldsymbol{g}(\omega, \mathbf{n}) = \boldsymbol{g}_2\, \boldsymbol{g}_1$ als Funktionen von ω_i und $\mathbf{n}_i, i = 1, 2$.

Obwohl SO(3) zunächst lediglich eine algbraische Struktur, eine Gruppe, ist, wird durch die Einführung einer Metrik eine Mannigfaltigkeit definiert, in der man Geometrie betreiben kann. Jedes Objekt dieser Mannigfaltigkeit stellt eine Rotation dar, und der Abstand von zwei Objekten ist durch die Metrik gegeben. Man kann also zum Beispiel sinnvoll einen Kreis von Rotationen durch zwei orthogonale Einheitsquaternionen, die den Kreis erzeugen, definieren.

Diesem Zugang folgend kann man mathematische Theoreme beweisen, die geometrische Objekte $\mathcal{Q}$ gebildet aus Einheitsquaternionen in Bezug setzen zu geometrischen Objekten $\mathcal{V}$ gebildet aus Einheitsvektoren, die das Ergebnis der Anwendung der Rotationen dargestellt durch die Elemente von $\mathcal{Q}$ auf Einheitsvektoren sind. Die wesentlichen Ergebnisse mit weitreichenden Anwendungen werden im Vortrag vorgestellt.

References

[1] Schaeben, H., 2006, Geometrie von Rotationen - Geometrie von Quaternionen auf der Kugel $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$: Freiberger Mathematische Semesterblätter, Studienjahr 2005/2006, 7–10
`www.mathe.tu-freiberg.de/inst/stoch/Bellmann/Semesterblatt/Heft6.pdf`

[2] Meister, L., Schaeben, H., 2004, A concise quaternion geometry of rotations: Mathematical Methods in the Applied Sciences 28, 101–126
`www.geo.tu-freiberg.de/mathe/pub/chs_paper_2004_2.pdf`